Options M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $\mathrm{Im}(x + iy) = y$

On définit U et Δ par : $U = \{\xi \in \mathbb{C} / |\xi| < 1\}$

$$\text{et } \Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} / |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\pi}{4} \right\}$$

On rappelle que : $\mathrm{th}\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction u_n de U dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall \xi \in U \qquad u_n(\xi) = (1 - \mathrm{th}\, n) \frac{1 + \xi}{1 - \xi\, \mathrm{th}\, n}$$

et la fonction B_n de Δ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \Delta \qquad B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{th}(k - z).$$

L'objet de ce problème est d'étudier la convergence puis la convergence uniforme de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur Δ.

1. *a.* Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\mathrm{th}\, z$ existe ?

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{th}\, z = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} |\mathrm{Im}\, z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\mathrm{th}\, z| < 1 . \end{cases}$

3. Montrer que la fonction th est une bijection de Δ dans U.

   On notera Arg th sa fonction réciproque de U sur Δ.

   Quelle est l'expression de Arg th x pour $x \in]-1, 1[$?

4. *a.* Soit $z \in \Delta$. Exprimer $u_n(\mathrm{th}\, z)$ en fonction de $\mathrm{th}(n - z)$.

   b. En déduire que pour tout $\xi \in U$:

$$B_n(\mathrm{Arg\,th}\, \xi) = \prod_{k=1}^{n} [1 - u_k(\xi)].$$

   On notera $B_n^*(\xi)$ ce produit.

5. *a.* Établir que : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |1 + z| \leqslant 1 + |z| \leqslant e^{|z|}$.

b. En déduire que si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sont m nombres complexes

$$\prod_{k=1}^{m} (1 + |v_k|) \leqslant e^{\sum_{k=1}^{m} |v_k|}.$$

c. En utilisant les mêmes notations, prouver que :

$$\left| \prod_{k=1}^{m} (1 + v_k) - 1 \right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} (1 + |v_k|) - 1 \leqslant e^{\sum_{k=1}^{m} |v_k|} - 1.$$

6. Soit $r \in]0, 1[$. On définit U_r par : $U_r = \{\xi \in \mathbb{C} / |\xi| \leqslant r\}$.

a. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} |u_n|$ est une série de fonctions uniformément convergente sur U_r.

b. En déduire que : $\exists M_{(r)} > 0 \quad \forall \xi \in U_r \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |B_n^*(\xi)| \leqslant M_{(r)}$
$B_n^*(\xi)$ est défini en 4.*b.*

c. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, établir que :

$$\forall \xi \in U \qquad |B_{p+m}^*(\xi) - B_p^*(\xi)| \leqslant |B_p^*(\xi)| \left[e^{\sum_{k=1}^{m} |u_{p+k}(\xi)|} - 1 \right]$$

7. Soient $\varepsilon > 0$ et $r \in]0, 1[$, on pose :

$$\varepsilon_r = \ln\left[1 + \frac{\varepsilon}{M_{(r)}}\right], \text{ (notation 6.}b.\text{)}$$

a. Montrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \xi \in U_r : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_{N+k}(\xi)| \leqslant \varepsilon_r.$$

b. Montrer que la suite de fonctions $(B_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge sur U vers une fonction B^*. Prouver que cette convergence est uniforme sur U_r pour tout $r \in]0, 1[$.

c. En déduire la continuité de B^* sur U.

8. *a.* Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que : $e^{\varepsilon_0} < 1 + 2\varepsilon_0$.

b. En déduire, en utilisant 6.*c.*, que :

$$\forall \xi \in U \qquad \exists p \in \mathbb{N}^* \qquad \exists K > 0 \qquad |B^*(\xi)| \geqslant K |B_p^*(\xi)|.$$

9. *a.* Soit $z \in \Delta$. Donner un sens à $\prod_{k=1}^{+\infty} \text{th}(k - z)$.

b. Résoudre dans Δ l'équation : $\prod_{k=1}^{+\infty} \text{th}(k - z) = 0$.

(On pourra utiliser 8.*b.* et 1.*b.*)

c. En déduire que la convergence de $(B_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur Δ.

[On pourra calculer $\lim_{x \to +\infty} B_{2n}(x)$.]